

Hong Kong Mathematics Olympiad (2002 – 2003)

Final Event 1 (Group)

香港數學競賽 (2002 – 2003)

決賽項目 1 (團體)

除非特別聲明，答案須用數字表達，並化至最簡。

Unless otherwise stated, all answers should be expressed in numerals in their simplest forms.

1. 已知 n, k 皆為自然數，且 $1 < k < n$ 。若 $\frac{(1+2+3+\cdots+n)-k}{n-1} = 10$ 及 $n+k=a$ ，求 a 的值。

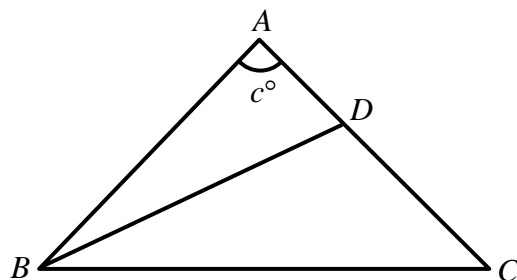
Given that n and k are natural numbers and $1 < k < n$. If $\frac{(1+2+3+\cdots+n)-k}{n-1} = 10$ and $n+k=a$, find the value of a .

2. 已知 $(x-1)^2 + y^2 = 4$ ，其中 x 和 y 是實數。若 $2x+y^2$ 的極大值是 b ，求 b 的值。

Given that $(x-1)^2 + y^2 = 4$, where x and y are real numbers. If the maximum value of $2x+y^2$ is b , find the value of b .

3. 如圖一， $\triangle ABC$ 是一個等腰三角形，其中 $AB=AC$ 。若 $\angle B$ 的角平分線交 AC 於 D 且 $BC=BD+AD$ 。設 $\angle A=c^\circ$ ，求 c 的值。

In Figure 1, $\triangle ABC$ is an isosceles triangle and $AB=AC$. Suppose the angle bisector of $\angle B$ meets AC at D and $BC=BD+AD$. Let $\angle A=c^\circ$, find the value of c .



圖一

Figure 1

4. 兩質數之和為 105。若這兩質數之積為 d ，求 d 的值。

Given that the sum of two prime numbers is 105. If the product of these prime numbers is d , find the value of d .

Hong Kong Mathematics Olympiad (2002 – 2003)

Final Event 2 (Group)

香港數學競賽 (2002 – 2003)

決賽項目 2 (團體)

除非特別聲明，答案須用數字表達，並化至最簡。

Unless otherwise stated, all answers should be expressed in numerals in their simplest forms.

1. 設方程 $ax(x+1)+bx(x+2)+c(x+1)(x+2)=0$ 有根 1 和 2。若 $a+b+c=2$ ，求 a 的值。

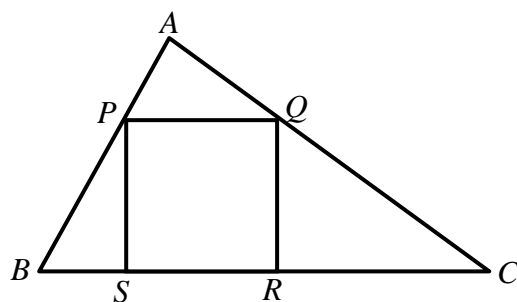
Given that the equation $ax(x+1)+bx(x+2)+c(x+1)(x+2)=0$ has roots 1 and 2. If $a+b+c=2$, find the value of a .

2. 設 $48^x=2$ ， $48^y=3$ 。若 $8^{\frac{x+y}{1-x-y}}=b$ ，求 b 的值。

Given that $48^x=2$ and $48^y=3$. If $8^{\frac{x+y}{1-x-y}}=b$, find the value of b .

3. 如圖一，正方形 $PQRS$ 內接於 $\triangle ABC$ 。 $\triangle APQ$ 、 $\triangle PBS$ 和 $\triangle QRC$ 的面積分別為 4、4 和 12。若正方形 $PQRS$ 的面積為 c ，求 c 的值。

In Figure 1, the square $PQRS$ is inscribed in $\triangle ABC$. The areas of $\triangle APQ$, $\triangle PBS$ and $\triangle QRC$ are 4, 4 and 12 respectively. If the area of the square $PQRS$ is c , find the value of c .



圖一

Figure 1

4. 在 $\triangle ABC$ 中， $\cos A = \frac{4}{5}$ 和 $\cos B = \frac{7}{25}$ 。若 $\cos C = d$ ，求 d 的值。

In $\triangle ABC$, $\cos A = \frac{4}{5}$ and $\cos B = \frac{7}{25}$. If $\cos C = d$, find the value of d .



Hong Kong Mathematics Olympiad (2002 – 2003)

Final Event 3 (Group)

香港數學競賽 (2002 – 2003)

決賽項目 3 (團體)

除非特別聲明，答案須用數字表達，並化至最簡。

Unless otherwise stated, all answers should be expressed in numerals in their simplest forms.

1. 設 f 為一函數， $f(1)=1$ ，並對任意整數 m 及 n ， $f(m+n)=f(m)+f(n)+mn$ 。若 $a = \frac{f(2003)}{6}$ ，求 a 的值。

Let f be a function such that $f(1)=1$ and for any integers m and n , $f(m+n)=f(m)+f(n)+mn$. If $a = \frac{f(2003)}{6}$, find the value of a .

2. 若 $x^{\frac{1}{2}} + x^{-\frac{1}{2}} = 3$ ， $b = \frac{x^{\frac{3}{2}} + x^{-\frac{3}{2}} - 3}{x^2 + x^{-2} - 2}$ ，求 b 的值。

Suppose $x^{\frac{1}{2}} + x^{-\frac{1}{2}} = 3$ and $b = \frac{x^{\frac{3}{2}} + x^{-\frac{3}{2}} - 3}{x^2 + x^{-2} - 2}$, find the value of b .

3. 已知 $f(n) = \sin \frac{n\pi}{4}$ ，其中 n 是整數。若 $c = f(1) + f(2) + \cdots + f(2003)$ ，求 c 的值。

Given that $f(n) = \sin \frac{n\pi}{4}$, where n is an integer. If $c = f(1) + f(2) + \cdots + f(2003)$, find the value of c .

4. 已知函數 $f(x) = \begin{cases} -2x+1, & \text{當 } x < 1 \\ x^2-2x, & \text{當 } x \geq 1 \end{cases}$ 。若 d 是 $f(x)=3$ 的最大整數解，求 d 的值。

Given that $f(x) = \begin{cases} -2x+1, & \text{when } x < 1 \\ x^2-2x, & \text{when } x \geq 1 \end{cases}$. If d is the maximum integral solution of $f(x)=3$,

find the value of d .



Hong Kong Mathematics Olympiad (2002 – 2003)

Final Event 4 (Group)

香港數學競賽 (2002 – 2003)

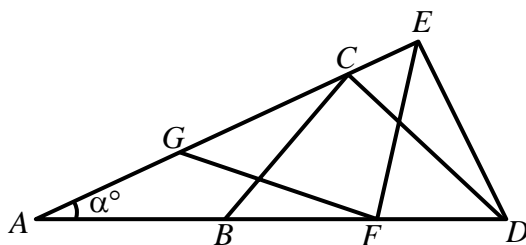
決賽項目 4 (團體)

除非特別聲明，答案須用數字表達，並化至最簡。

Unless otherwise stated, all answers should be expressed in numerals in their simplest forms.

1. 如圖一， AE 、 AD 是直線且 $AB = BC = CD = DE = EF = FG = GA$ 。若 $\angle DAE = \alpha^\circ$ ，求 α 的值。

In Figure 1, AE and AD are two straight lines and $AB = BC = CD = DE = EF = FG = GA$. If $\angle DAE = \alpha^\circ$, find the value of α .



圖一

Figure 1

2. 設 $P(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots + a_8x^8$ 為八次多項式，其中 a_0, a_1, \dots, a_8 為實數。若 $P(k) = \frac{1}{k}$ 當 $k = 1, 2, \dots, 9$ ，及 $b = P(10)$ ，求 b 的值。

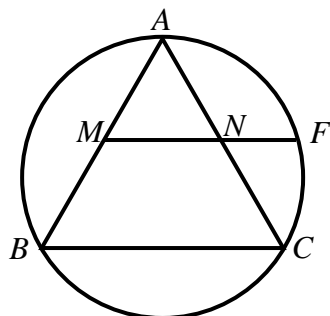
Suppose $P(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots + a_8x^8$ is a polynomial of degree 8 with real coefficients a_0, a_1, \dots, a_8 . If $P(k) = \frac{1}{k}$ when $k = 1, 2, \dots, 9$, and $b = P(10)$, find the value of b .

3. 已知 x, y 為兩正整數使 $xy - (x + y) = \text{HCF}(x, y) + \text{LCM}(x, y)$ ，其中 $\text{HCF}(x, y)$ 和 $\text{LCM}(x, y)$ 分別是 x 和 y 的最大公因數和最小公倍數。若 c 是 $x + y$ 的最大可能的值，求 c 。

Given two positive integers x and y , $xy - (x + y) = \text{HCF}(x, y) + \text{LCM}(x, y)$, where $\text{HCF}(x, y)$ and $\text{LCM}(x, y)$ are respectively the greatest common divisor and least common multiple of x and y . If c is the maximum possible value of $x + y$, find c .

4. 如圖二， $\triangle ABC$ 是等邊三角形， M 及 N 分別是 AB 及 AC 的中點， F 是直線 MN 與圓 ABC 的交點。若 $d = \frac{MF}{MN}$ ，求 d 的值。

In Figure 2, $\triangle ABC$ is an equilateral triangle, points M and N are the midpoints of sides AB and AC respectively, and F is the intersection of line MN with the circle ABC . If $d = \frac{MF}{MN}$, find the value of d .



圖二

Figure 2

